Ex.3(1) 判别下列向量组线性相关还是线性无关.

$$(1)\ \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}7\\4\\-3\end{pmatrix}.$$

解法一. 利用向量组的秩.

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&2&7\\-2&5&4\\-5&6&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&7\\0&9&18\\0&16&32\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&7\\0&9&18\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

因为$rank(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$, 所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

解法二. 利用相关性定义. 考虑$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$, 即齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix}1&2&7\\-2&5&4\\-5&6&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0. \tag{1}$$

因为系数矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix}1&2&7\\-2&5&4\\-5&6&-3\end{vmatrix}=-15-84-40+175-24-12=0.$$

所以齐次线性方程组(1) 有非零解, 从而向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

解法三. 利用等阶性质(书上第90 页定理5.3.2). 记矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 因为

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&7\\-2&5&4\\-5&6&-3\end{vmatrix}=-15-84-40+175-24-12=0.$$

所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

说明. 解法一适用于任意多个向量, 而解法三只适用于向量个数与向量维数相同的情形.